

Hydrodynamique [1]

Etablissement de l'équation de Bernoulli :

Dans le chapitre précédent nous avons montré que la pression hydrostatique était égale à :

$$p_{(H)} = p_0 + \rho \times g \times H \text{ (pression absolue)}$$

Avec H : hauteur du fluide, p_0 : pression s'exerçant au-dessus de la surface du fluide et ρ : densité du fluide

Considérons maintenant une particule de fluide en mouvement

$$\text{On a : } \sum \vec{F}_{ext} = m \times \vec{a}$$

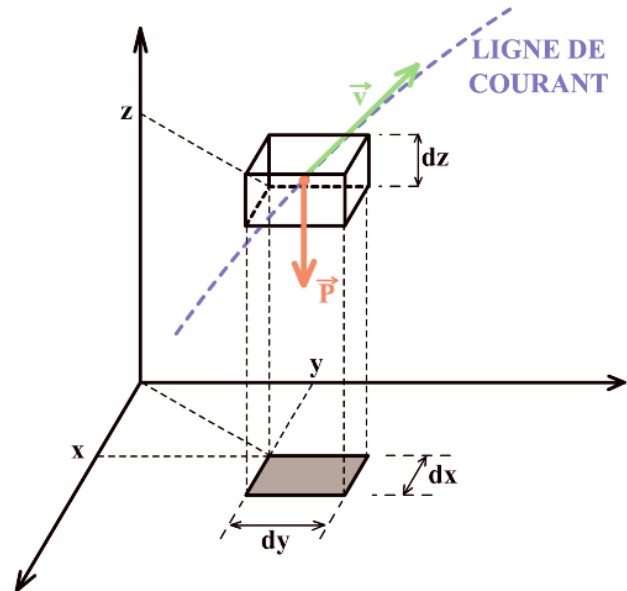
De façon simplifiée :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot \frac{dv_x}{dt} \text{ variation de pression suivant } x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \cdot \frac{dv_y}{dt} \text{ variation de pression suivant } y$$

$$-\rho \cdot g - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \cdot \frac{dv_z}{dt} \text{ variations de pression suivant } z$$

$$\text{Or } dp = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy - \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \text{ (dérivés partielles)}$$



$$\text{Soit : } dp = -\rho \cdot \frac{dv_x}{dt} \cdot dx - \rho \cdot \frac{dv_y}{dt} \cdot dy - \left[\rho \cdot \frac{dv_z}{dt} + \rho \cdot g \right] \cdot dz \text{ (en remplaçant par les expressions précédentes)}$$

Après simplification, on admettra le résultat suivant

$$dp = -\rho \cdot v \cdot dv - \rho \cdot g \cdot dz$$

$$dp + \rho \cdot v \cdot dv + \rho \cdot g \cdot dz = 0 \text{ (équation d'Euler)}$$

sous sa forme intégrée on obtient

$$\boxed{p + \frac{\rho}{2} \cdot V^2 + \rho \cdot g \cdot Z = \text{constante}} \text{ (équation de Bernoulli)}$$

On appellera $\boxed{p + \rho \cdot g \cdot Z = p^*}$ pression statique (à ne pas confondre avec la pression hydrodynamique)

On appellera $\boxed{\frac{\rho}{2} \cdot V^2}$ pression dynamique

$$\text{Rappel : } \textit{pression} = \frac{\textit{énergie}}{\textit{volume}} = \frac{\textit{puissance}}{\textit{débit}}$$

Equivalences électriques :

$$\frac{\textit{puissance électrique}}{\textit{intensité}} = \textit{tension}$$

La tension en électricité est équivalente à la hauteur d'une chute d'eau, l'intensité est équivalente au courant d'eau (débit)

$$u = \frac{W=u.i.t}{i.t} = \frac{P=u.i}{Q=i} !$$

Hydrodynamique [2]

Autre forme :

$$\frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{V^2}{2 \cdot g} + Z = \text{constante}$$

$\frac{p}{\rho \cdot g}$: hauteur manométrique

$\frac{p}{\rho \cdot g} + Z$: hauteur piézométrique

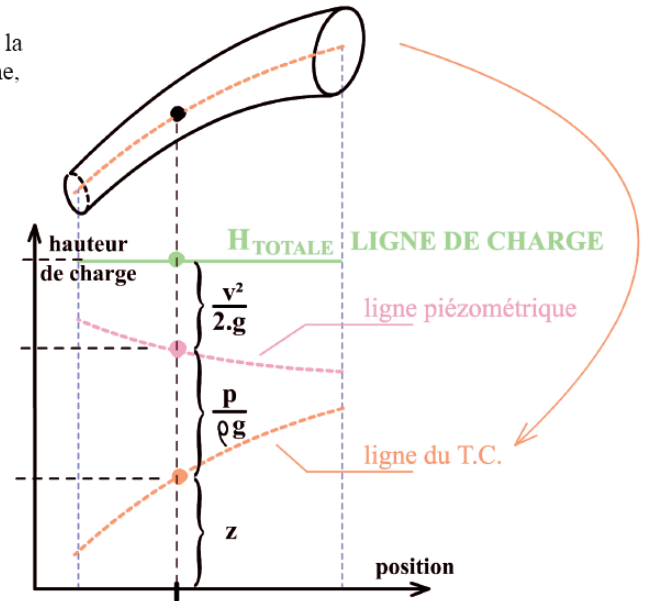
$\frac{V^2}{2 \cdot g}$: hauteur capable

Z : altitude

La somme des 3 termes est la charge totale ou hauteur manométrique équivalente

Le bilan en hauteurs permet la construction d'un diagramme.

le diagramme piézométrique :



Hydrodynamique [3]

Forces hydrodynamiques :

Q_m : débit massique : $Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ exprimé en Kg/s

Q_v : débit volumique : $Q_v = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ exprimé en m³/s

On notera au passage que : $Q_m = \rho \cdot Q_v$

Si l'écoulement est stationnaire les débits volumiques et massiques sont constants

On a : $Q_v = V \cdot S$ avec V en m/s ; S en m²

Rappel :

Equation fondamentale de la dynamique : $\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$

Or $m = Q_m \cdot t$ $\sum \vec{F}_{ext} = Q_m \cdot t \cdot (dV/dt)$ $\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = Q_m \cdot \Delta \vec{V}}$

$Q_m (\vec{V}_s - \vec{V}_e) = \sum \vec{F}_{ext}$ (théorème d'Euler)

Si on néglige le poids du fluide on obtient :

$Q_m (\vec{V}_s - \vec{V}_e) = \vec{F}_e + \vec{F}_s + \vec{F}_{c \rightarrow f}$

D'où

$\vec{F}_{c \rightarrow f} = -Q_m (\vec{V}_s - \vec{V}_e) - \vec{F}_e - \vec{F}_s$

Application :

$\vec{F}_e : \begin{vmatrix} p_e \cdot S \cdot \cos\alpha \\ p_e \cdot S \cdot \sin\alpha \end{vmatrix}$ $\vec{V}_e : \begin{vmatrix} V \cdot \cos\alpha \\ V \cdot \sin\alpha \end{vmatrix}$

$\vec{F}_s : \begin{vmatrix} -p_s \cdot S \\ 0 \end{vmatrix}$ $\vec{V}_s : \begin{vmatrix} V \\ 0 \end{vmatrix}$

$\vec{F}_{c \rightarrow f} : \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \end{vmatrix}$ $Q_m = \rho \cdot S \cdot V$

Soit :

$F_x = (\rho \cdot V^2 + p) \cdot S \cdot (1 - \cos\alpha)$

$F_y = -(\rho \cdot V^2 + p) \cdot S \cdot \sin\alpha$

d'où :

$\vec{F}_{f \rightarrow c} : \begin{vmatrix} (\rho \cdot V^2 + p) \cdot S \cdot (\cos\alpha - 1) \\ (\rho \cdot V^2 + p) \cdot S \cdot \sin\alpha \end{vmatrix}$

